Chapitre 1

LE PRODUIT SCALAIRE

PROGRAMMES

Connaissances

— Produit scalaire à partir de la projection orthogonale et de la formule avec le cosinus.
Caractérisation de l'orthogonalité.

— Bilinéarité, symétrie. En base orthonormée, expression du produit scalaire et de la norme, critère d'orthogonalité.

— Développement de $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2$. Formule d'Al-Kashi. Expressions du produit scalaire à l'aide de normes :
$\vec{u}.\vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right) = \dfrac{1}{4}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$.

— Transformation de l'expression $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$.

— Transformation de $MA^2 + MB^2$ à l'aide du milieu de [AB] et formule de la médiane.

— Centre de gravité d'un triangle. Application à l'intersection des médianes et à la minimisation de l'expression $MA^2 + MB^2 + MC^2$.

Capacités associées

n°1 Utiliser le produit scalaire pour démontrer une orthogonalité, pour calculer un angle, une longueur dans le plan ou dans l'espace.

n°2 En vue de la résolution d'un problème, calculer le produit scalaire de deux vecteurs en choisissant une méthode adaptée (en utilisant la projection orthogonale, à l'aide des coordonnées, à l'aide des normes et d'un angle, à l'aide de normes).

n°3 Utiliser le produit scalaire pour résoudre un problème géométrique : recherche de lieux, de lignes de niveau, optimisation.

Démonstrations

— Formule d'Al-Kashi (démonstration avec le produit scalaire).

— Ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ (démonstration avec le produit scalaire).

— Transformations de $MA^2 + MB^2$ et de $MA^2 + MB^2 + MC^2$.

— Les médianes d'un triangle concourent au centre de gravité.

Approfondissements

— Loi des sinus.

— Droite d'Euler d'un triangle.

SÉQUENÇAGE SUR L'ANNÉE

Prérequis :
la fonction cosinus
Nécessité de se concerter avec les collègues de physique pour la notion de travail d'une force

Organisation :
Séquence 1 : avant Noël introduire le produit scalaire comme travail d'une force pour dégager les expressions du produit scalaire comme produit des normes par le cosinus de l'angle et projection.
Puis à partir de l'activité dégager les premières propriétés autour de la linéarité (homogénéité et additivité).
Séquence 2 : 1 mois après on aborde les autres expressions du produit scalaire à partir des normes et l'expression dans un repère orthonormal.
Séquence 3 : En fin d'année Approfondissements et lieux de points

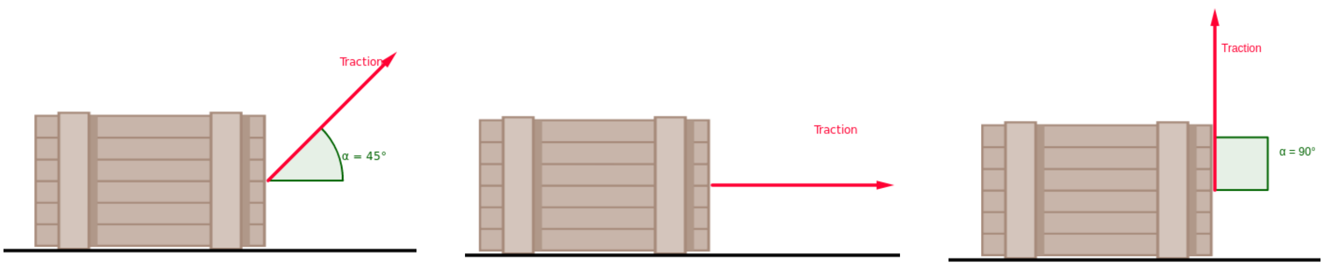
Postrequis :
Travail analytique autour des équations de droites et de cercles : le produit scalaire sera réinvesti dans le chapitre « géométrie repérée »

Découpages des séquences et intentions

SÉQUENCE 1. DEUX PREMIÈRES DÉFINITIONS 6heures

SÉANCE 1 : Conjecture et travail en autonomie GGB et première définition avec le cosinus

Durée : 2 heures
L'activité est proposée en document annexe.



> **Compétences :** Représenter. Chercher.
>
> **Descripteurs**
>
> Choisir un cadre (numérique, algébrique, géométrique...) adapté pour traiter un problème ou pour représenter un objet mathématique.
>
> Observer, s'engager dans une démarche, expérimenter en utilisant éventuellement des outils logiciels, chercher des exemples ou des contre-exemples, simplifier ou particulariser une situation, reformuler un problème, émettre une conjecture.
>
> Valider, corriger une démarche, ou en adopter une nouvelle.

Cette séance est basée sur un travail à l'aide de Geogebra.
Dans les 10 premières minutes, les élèves bougent leurs tables selon le principe du travail d'une force pour s'apercevoir qu'il est impossible de déplacer une table en la poussant perpendiculairement à son déplacement.
Les élèves doivent conjecturer la propriété de bi-linéarité du travail d'une force et établir la formule avec le cosinus du produit scalaire.

Les élèves sont placés par binôme devant un ordinateur.

> **Objectif de séance**
> A partir d'une situation kinesthésique, puis de la visualisation, les élèves conceptualisent la notion de produit scalaire.

Cette activité se classe dans la partie M du modèle `SAMR` :
https://ecolebranchee.com/le-modele-samr-une-reference-pour-lintegration-reellement-pedagogique-des-tic-en-classe/

SÉANCE 2 : Définition par la projection.
Durée : 2 heures

> **Compétences :** Raisonner. Communiquer. Chercher
>
> **Descripteurs**
>
> Développer une argumentation mathématique correcte à l'écrit ou à l'oral.
>
> Effectuer des inférences (inductives, déductives) pour obtenir de nouveaux résultats, conduire une démonstra-

tion, confirmer ou infirmer une conjecture, prendre une décision.

Différencier le statut des énoncés mis en jeu : définition, propriété, théorème démontré, théorème admis…

Utiliser les notions de la logique élémentaire (conditions nécessaires ou suffisantes, équivalences, connecteurs) pour bâtir un raisonnement.

1. Cours formel sur la synthèse par trace écrite de la séance précédente et la définition par la projection
2. Lien entre les deux définitions
3. Théorème et propriété bi-linéarité. Travail sur la démonstration.

Pour le travail sur les démonstrations, l'enseignant clairement démontrera le premier théorème.
Par la suite, il pourra mettre les élèves en groupes pour les faire chercher les démonstrations. Par exemple, il serait possible que les élèves soient en îlot durant cette séance et qu'à chaque démonstration, les « îlots » cherchent durant 15 minutes la démonstration actuelle.
Une autre méthode consisterait à ce que l'enseignant élude les démonstrations en laissant une place vide pour chacune et qu'après avoir formalisé les propriétés et définitions, il place ses élèves en îlots pour leur donner selon leur niveau une démonstration à trouver. Dans ce cas, on pourrait penser à des groupes homogènes avec une démonstration à chercher selon le niveau du groupe. Chaque groupe ensuite propose au tableau sa démonstration à la classe pour validation et synthèse.
Selon le degré de pratique des outils numériques, les démonstrations pourraient être numériques, pour un partage sur un ENT.

Objectif de séance
Formaliser, assurer une trace écrite rigoureuse après une première séance de conjecture et de découverte. Proposer deux définitions du produit scalaire et travailler sur la démonstration, en particulier, sur celle des propriétés.

SÉANCE 3 : Explicitation et algorithmique de résolution.
Durée : 2 heures

Compétences : Modéliser. Chercher.

Descripteur

Analyser un problème.

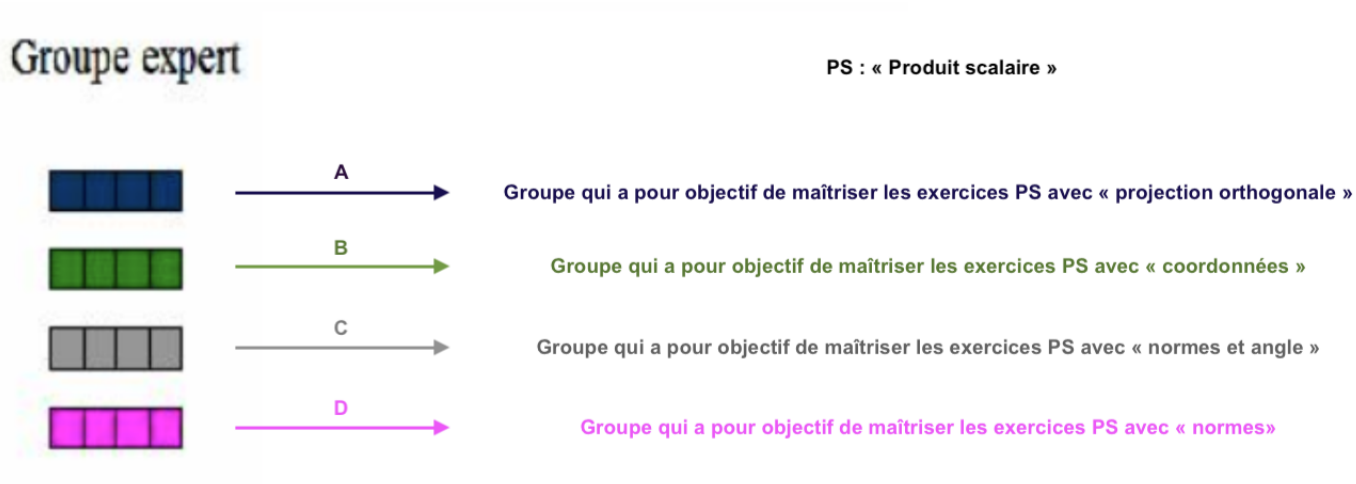
Traduire en langage mathématique une situation réelle (à l'aide d'équations, de suites, de fonctions, de configurations géométriques, de graphes, de lois de probabilité, d'outils statistiques …).

Utiliser, comprendre, élaborer une simulation numérique ou géométrique prenant appui sur la modélisation et utilisant un logiciel.

Les élèves sont amenés à expliciter les méthodes de résolution selon le type du problème posé. Seules les deux définitions (par le cosinus et par la projection sont connus à ce stade par les élèves.

SÉANCE 1 : Les deux autres définitions.
Durée : 1 heure

Exposé par l'enseignant



Objectif de séance
Apports théoriques avec l'aide du numérique pour montrer les définitions expliquées et démontrées.

SÉANCE 2 : Exercices par groupe d'experts sur une définition pour une montée en compétence
Durée : 2 heures

Compétences : Raisonner. Modéliser. Communiquer.

Descripteur

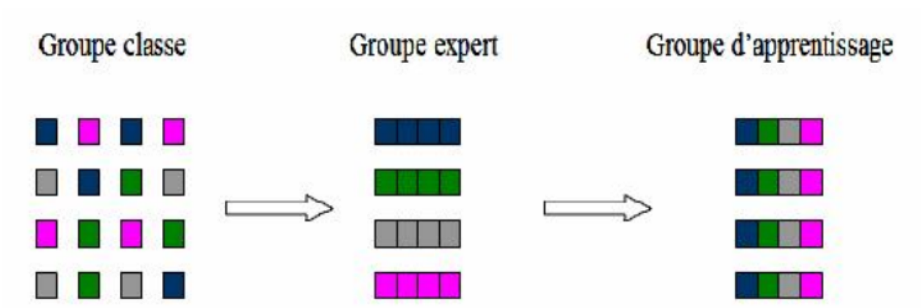
Analyser un problème.

Valider, corriger une démarche, ou en adopter une nouvelle..

Valider ou invalider un modèle.

Critiquer une démarche ou un résultat.

Chaque groupe d'élèves ne pratique qu'une seule définition pour devenir expert sur cette méthode de résolution.



Ici c'est la phase Groupe expert qui va nous intéresser. Dans chacun des groupes experts, sera travaillé une manière d'utiliser le produit scalaire. Les élèves devront maîtriser les techniques de calcul, les exercices proposés et les problèmes liés à la thématique.

Objectif de séance
Chaque élève monte en compétence par rapport à une seule définition. Il devient expert de sa définition et devra pouvoir l'expliquer à ses pairs en tant qu'ex-pair dans la séance suivante.

SÉANCE 3 : Explicitation par les pairs.
Durée : 1 heure

Compétences : Raisonner. Modéliser. Communiquer.

Descripteur

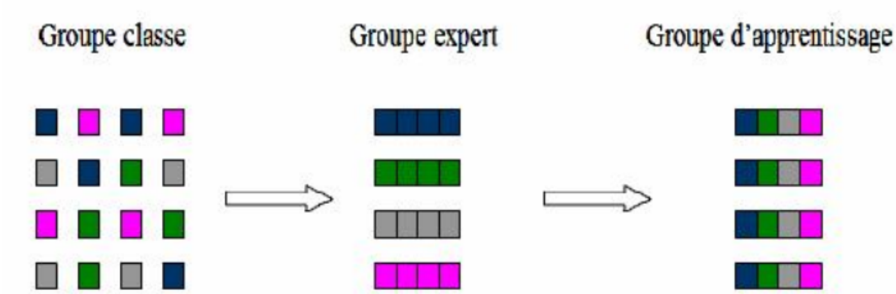
Analyser un problème.

Valider, corriger une démarche, ou en adopter une nouvelle..

Valider ou invalider un modèle.

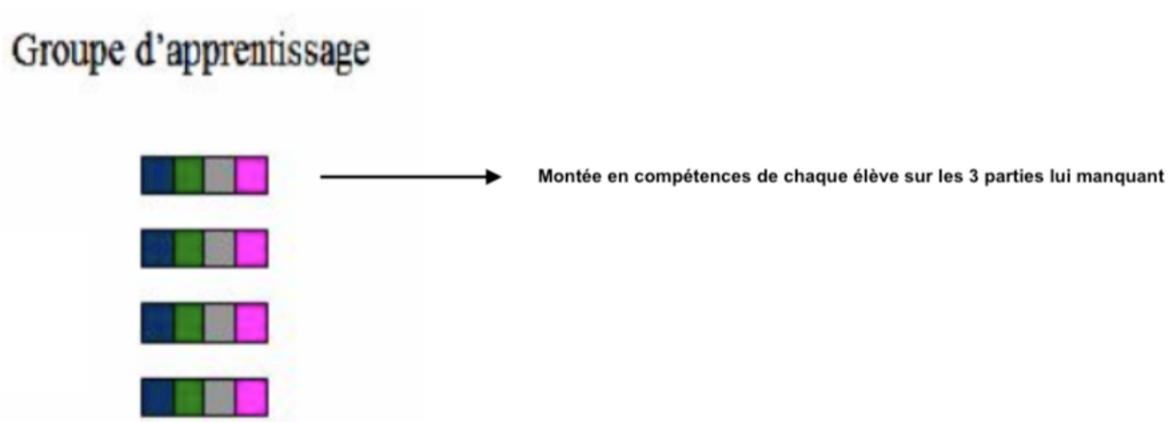
Critiquer une démarche ou un résultat.

Les experts de chaque définition se regroupent en experts pour le produit scalaire. C'est à dire en nommant A, B, C et D les experts par définitions, on a au début des groupes experts de A, des groupes experts de B, des groupes experts de C et des groupes experts de D. Dans cette séance, chaque groupe est constitué d'un élève de A, un élève de B, un élève de C, et un élève de D. Chaque élève apporte son expertise au groupe.



Chaque élève expert de son groupe est associé à 3 autres experts (à réguler avec le nombre d'élèves de la classe). Ces nouveaux groupes, appelés Groupe d'apprentissage, auront pour objectifs :

— Faire acquérir leur expertise aux autres membres du groupe afin que chacun devienne habile dans le domaine du produit scalaire qui n'était pas le sien.



— Dégager des invariants de catégorisation de problèmes : trouver pourquoi tel ou tel problème a été placé par l'enseignant dans tel domaine. Qu'est-ce qui permettrait de dire « je vais utiliser la norme et l'angle » ou « je vais utiliser les coordonnées » ?

on pourra s'appuyer sur les figures suivantes :

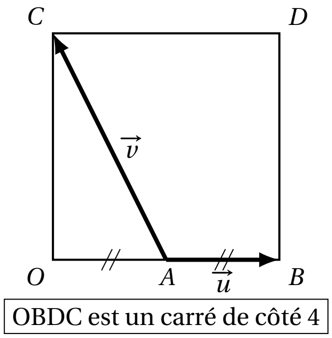


Figure 1

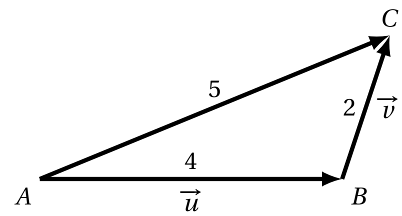


Figure 2

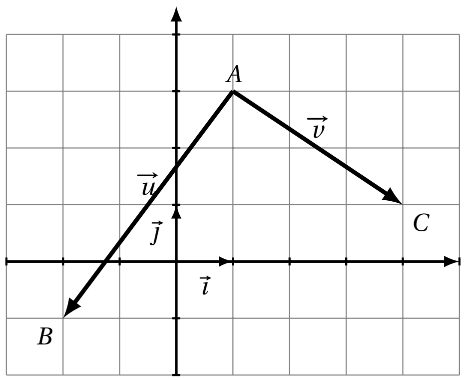


Figure 3

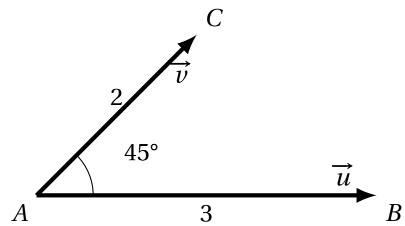


Figure 4

Calculer le produit scalaire $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ dans chacun des 4 cas.

La réponse ne nous intéresse pas, ce qui nous intéresse c'est quels sont les éléments qui vous ont fait choisir tel chemin plutôt que tel autre et faire émerger des phrases types : « Pour la Figure 4 je vais utiliser .....car j'ai remarqué qu'il y avait....... »

L'enseignant est ici régulateur des apprentissages et se doit de guider et orienter vers les termes et notions spécifiques. C'est là où se gagne la différentiation :

— Les élèves bons n'ont pas besoin pour leur apprentissage de ce type de protocole, ils arrivent de manière implicite à faire ce travail de synthèse. Ils développeront néanmoins ces compétences de synthèse de manière plus rapide, mais surtout des compétences de gestion collaborative et de communication.
— Les élèves moins doués en mathématiques, eux, devraient progresser par l'explicitation et la verbalisation dans à la fois ces compétences d'analyse d'une situation et dans celles de synthèses finales. Ce travail, rarement effectué, est un grand levier pédagogique dans un premier temps, mais surtout didactique. En effet, c'est en explicitant clairement les invariants/variants des situations problèmes en géométrie que l'on va habituer nos raisonnements à confronter les futures situations problèmes à celles déjà résolues, et surtout classées.

Quelques outils (surtout « numériques ») ici indispensable pour que l'enseignant s'assure de l'acquisition des notions et du travail :

— DTL
— ENT avec questionnaire (QCM,...)
— ou tout simplement « Que n'avez-vous pas compris ».

Objectif de séance
Collaborer, coopérer pour apprendre par les pairs.

SÉANCE 4 : Validation des algorithmes de résolution. Travail collaboratif.
Durée : 3 heures

Compétences : Représenter. Calculer. Communiquer.

Descripteur

Analyser un problème.

Mettre en œuvre des algorithmes simples.

S'exprimer avec clarté et précision à l'oral et à l'écrit.

Objectif de séance
Les élèves utilisent leurs résultats de la séance précédente pour vérifier si leur démarche "algorithmique" peut s'appliquer pour la résolution d'un exercice sur le produit scalaire. On pourrait aller jusqu'à faire une typologie des problèmes et de leur méthode de résolution, pour créer un programme de résolution simple avec des test selon des choix critériés.

Commentaires

Le séquençage : il a été envisagé afin de permettre à tous de suivre les éléments clés de ce chapitre. La séquence 3, non détaillée dans ce document, est à proposer à tous bien sûr mais à réserver surtout aux élèves se destinant à la spécialité Mathématiques en Terminale. D'où son placement en fin d'année scolaire.
L'organisation proposée en moitié de séquence 2 :
La proposition suivante est en fait indépendante du chapitre abordé et correspond à la partie « Travail autour de l'oral et du travail collaboratif ». C'est un dispositif qui a pour objectif de faire caractériser les types d'exercices aux élèves. C'est également un dispositif de différenciation car il va permettre de développer plutôt les compétences de synthèse des uns et au contraire construire celles d'analyse, souvent manquantes, chez les élèves ayant plus de difficultés en mathématiques.

Elle découle des constats suivants :

— La spécialité Mathématique aura un grand spectre d'hétérogénéité
— Il faut donner du plaisir à continuer les mathématiques, que ce soit en spécialité ou en option en Terminale, ou à les vivre si les élèves abandonnent en fin d'année.
— Les compétences d'autonomie dans la construction des apprentissages et de travail collaboratif sont des enjeux majeurs
— L'enseignement des stratégies est assez absent de nos pratiques, il est essentiel en mathématiques.

Elle repose sur les éléments suivants du programme :

— Capacité n˚2 : En vue de la résolution d'un problème, calculer le produit scalaire de deux vecteurs en choisissant une méthode adaptée (en utilisant la projection orthogonale, à l'aide des coordonnées, à l'aide des normes et d'un angle, à l'aide de normes)
— Compétence mise en avant dans le protocole suivant : bien évidemment, c'est la compétence *Représenter* ici qui sera la principale observée car il s'agit bien à partir d'une situation problème rencontrée, sachant que l'on est dans une modélisation vectorielle, de s'en donner une représentation la plus à même de conduire à une résolution efficiente. Bien évidemment également, les compétences *Chercher*, *Raisonner*, *Calculer* et *Communiquer* seront au cœur des activités. Seule la compétence Modéliser est mise de côté et trouvera mieux son observation lors du travail de la Capacité n°3 (Utiliser le produit scalaire pour résoudre un problème géométrique : recherche de lieux, de lignes de niveau, optimisation.

Elle s'appuie sur 3 axes, didactiques ou pédagogiques :

— Une caractérisation des situations problèmes rencontrées : dans la même idée que le référencement en typologie de Vergnaud au primaire, et que dans la modélisation des opérations dans la Méthode de Singapour,
— Une verbalisation nécessaire pour expliciter ces caractéristiques : directement issue des Méthodes asiatiques d'enseignement des mathématiques,
— Un apprentissage de l'autonomie qui ne se résume pas à un conseil oral mais suit un protocole précis : basée sur une technique d'enseignement inventée en 1971 par le sociologue et psychologue américain Elliot Aronson.Ce document n'est pas une ressource d'exercices types à donner pour le produit scalaire. Il se propose juste d'offrir un regard différent, une pratique et une réflexion qui peut être amenée quel que soit le support d'exercices choisi.

Séquence 1. Deux premières définitions

Travail d'une force

2 heures

L'objectif de cette activité est de déterminer une formule permettant de déterminer le travail effectué par une force $\vec{F}$ lors d'un déplacement d'un point A à un point B $\left(\overrightarrow{AB}\right)$ où le travail de la force est un moyen d'évaluer les transferts d'énergie en jeu.

Lien entre le travail et l'intensité de la force

Ouvrir le fichier produit-scalaire.ggb.
En manipulant le curseur « Intensité de la force », répondre aux questions suivantes :

1. Quelle est la valeur du travail observé si l'intensité de la force est nulle ?

   ....

2. Comment varie le travail lorsque l'intensité de la force est doublée ?

   ....

3. Plus généralement, quelle conjecture peut-on émettre sur la relation entre l'intensité d'une force et le travail ?

   ....

L'objet de cette partie est de tester la conjecture.

1. Fermer la fenêtre Graphique 1 puis ouvrir la fenêtre Graphique 2 **et** la fenêtre Tableur.
   Dans la ligne de saisie de Graphique 2, définir un point M de coordonnées $(intensité\ ,\ travail)$ puis cliquez droit sur le point M et enfin sélectionnez l'option Enregistrer dans le tableur.
2. Fermer la fenêtre Graphique 2 puis ouvrir la fenêtre Graphique 1.
   Déplacer le curseur de l'intensité de la force pas à pas. Les deux premières colonnes se remplissent avec dans la première colonne les valeurs de l'intensité et dans la seconde la valeur du travail.
3. Fermer la fenêtre Graphique 1 puis ouvrir la fenêtre Graphique 2.
   Sélectionnez les deux colonnes obtenues puis cliquez droit sur les données, puis sélectionnez l'option Créer Liste de points.
   Votre conjecture semble-t-elle se confirmer ?

   ....

Lien entre le travail et le déplacement

En manipulant le curseur « distance à parcourir », répondre aux questions suivantes :

1. Quel est le travail si la distance à parcourir est nulle ?

   ....

2. Si la distance à parcourir est doublée, comment le travail varie-t-il ?

   ....

3. Plus généralement, quelle conjecture peut-on émettre sur la relation entre la distance à parcourir et le travail ?

   ....

4. En procédant de la même manière que précédemment, créer un point N de coordonnées $(distance\ ,\ travail)$ et tester votre conjecture. Se confirme-t-elle ?

   ....

Lien entre le travail et l'angle entre $\vec{F}$ et $\vec{AB}$

On fixe pour cette question l'intensité de la force à 2,5 N et le déplacement à 5 m.
En manipulant le curseur « α », répondre aux questions suivantes :

1. Quel est le travail de la force si la force est orthogonal au déplacement ?

   ....

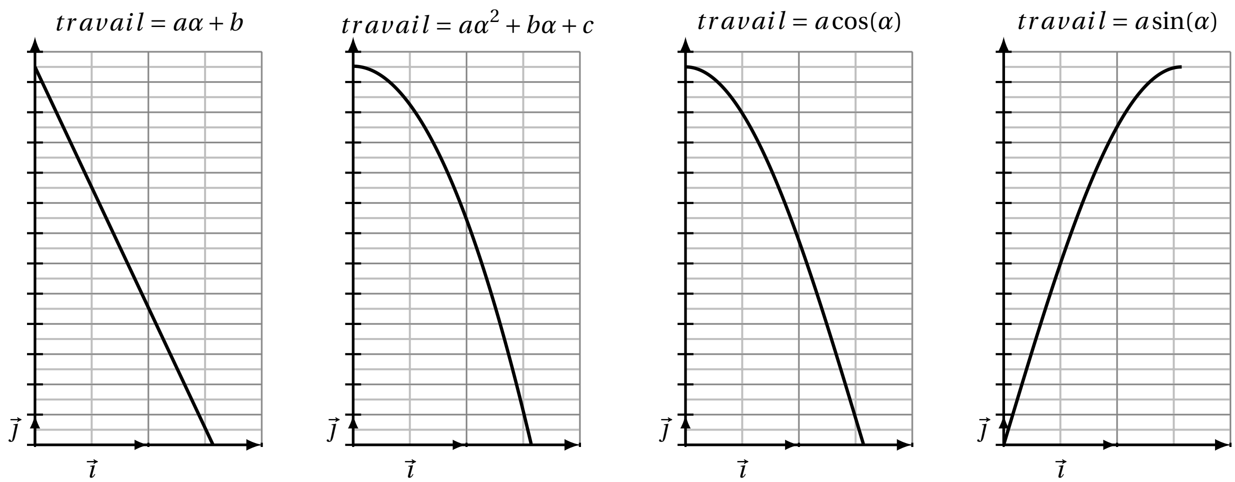
2. Si la mesure de l'angle entre $\vec{F}$ et $\overrightarrow{AB}$ est doublée qu'arrive-t-il au travail ?

. . . .

3. Ci-dessous 4 modélisations du travail en fonction de la mesure de l'angle sont représentées.
   Quelle(s) modélisation(s) peut-on écarter ? Justifier brièvement la réponse.

. . . .

. . . .



4. Pour déterminer la modélisation la plus adéquate, on pourra créer un point P de coordonnées $(\alpha\ ,\ travail)$. Cela permet-il de conclure précisément sur la modélisation la plus pertinente ? Pourquoi ?

. . . .

5. Le point Q de coordonnées $(\cos(\alpha)\ ,\ travail)$ permet de conclure précisément sur la modélisation la plus adéquate. Expliquer pourquoi.

. . . .

6. Déterminer la valeur de a de la modélisation retenue.

. . . .

Synthèse

Déterminer l'expression algébrique du travail en fonction de la force $\vec{F}$, du déplacement à effectuer $\left(\overrightarrow{AB}\right)$ et de l'angle entre ces deux vecteurs.

. . . .

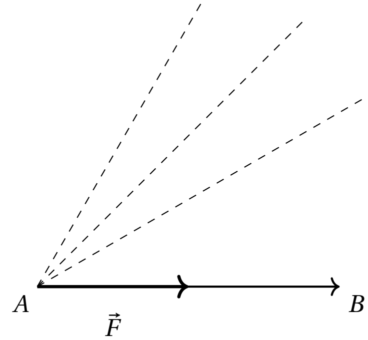
Pour aller plus loin

1. Utiliser le Graphique 1 pour renseigner le tableau ci-dessous.
2. En arrondissant à l'unité les résultats de la dernière ligne, que remarque-t-on ?
3. La première colonne de ce tableau a été représenté sur la figure ci-dessous.
   Représenter les trois autres vecteurs force correspondant aux trois dernières colonnes de ce tableau.
4. Conclure.

. . . .

. . . .

Intensité de la force	2	2,3	2,8	4
Mesure de l'angle α	0	30	45	60
travail				



Définitions et propriétés

2 heures

Définitions

Le plan est muni d'un rep'ere orthonormal $\left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$. On note $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

Définition 1.

On appelle produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ le nombre réel, noté $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ et définie par

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$$

Remarques.

— Si l'un des vecteurs est nul alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$

Commutativité

Théorème 1.

Pour tout vecteur $\vec{u}$ et tout vecteur $\vec{v}$, $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$.

Preuve : Pour tout vecteur $\vec{u}$ et tout vecteur $\vec{v}$, $\cos(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = \cos(\overrightarrow{v};\overrightarrow{u})$
$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = \|\overrightarrow{v}\| \times \|\overrightarrow{u}\| \times \cos(\overrightarrow{v};\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$

Vecteurs colinéaires

Théorème 2.

On note $\vec{u}$ et $\vec{v}$, deux vecteurs colinéaires. Il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{v}$.

Si $\alpha > 0$ $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$

Si $\alpha < 0$ $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = -\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$

Preuve : On note $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs colinéaires. Il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = \alpha\vec{v}$.

Si $\alpha > 0$ alors $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 1$ donc $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$

Si $\alpha < 0$ alors $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = -1$ donc $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = -\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$

Remarque

Si $\vec{u} = \vec{v}$ alors $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}^2 = \vec{u}^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2$

Théorème fondamental.
Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls,

$$\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \iff \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$$

Preuve : Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls.
Si $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ alors $\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, donc $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) = 0$ donc $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$

Réciproquement, si $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$, puisque $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls alors $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) = 0$ donc $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$.

Conséquences. A, B, C et D sont 4 points distincts du plans.
Deux droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires lorsque les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux.

Par projection orthogonale

On note $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Soient O, A et B trois points du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.

Définition 2. ***Par projection orthogonale***

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont deux vecteurs non nuls.
$\vec{u}\,.\,\vec{v} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$ où H est le projeté orthogonal de B sur la droite (OA).

Remarque

On dit aussi que $\overrightarrow{OH}$ est le projeté de $\overrightarrow{OB}$ sur la droite (OA).

PreuveDémonstration par disjonction des cas :

$\widehat{AOB}$ **est aigu** Dans le triangle OHB rectangle en H on a : $\cos(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) = \cos\widehat{HOB} = \dfrac{OH}{OB}$

Donc $OH = OB \times \cos(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$
Donc $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) = OA \times OH$
Comme les points A, O et H sont alignés, les vecteurs sont colinéaires donc $OA \times OH = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$

$\widehat{AOB}$ **est obtus** Dans le triangle OHB rectangle en H on a : $\cos(\overrightarrow{OH};\overrightarrow{OB}) = \cos\widehat{HOB} = \dfrac{OH}{OB}$

Or $\widehat{HOB} = \pi - \widehat{AOB}$ donc $\cos(\pi - \widehat{AOB}) = \dfrac{OH}{OB} = -\cos(\widehat{AOB})$.
Donc $OH = -OB \times \cos(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$
Donc $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) = OA \times (-OH)$
Comme les points A, O et H sont alignés et de sens opposés, les vecteurs sont colinéaires donc $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH} = OA \times (-OH)$ et $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$

Propriétés

D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{D'D}$
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{D'D}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{D'D}$
Or, par condition d'orthogonalité, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DD'} = 0$ donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$

Produit scalaire et opérations

Distributivité

Linéarité

Définitions et propriétés

2 heures

Séquence 2. Deux autres définitions

Travail d'une force

2 heures

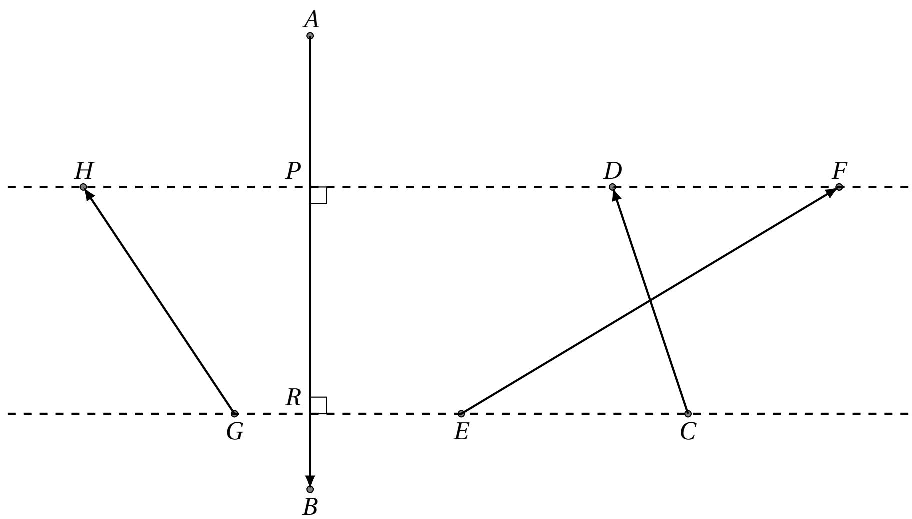
L'objectif de cette activité est de déterminer une formule permettant de déterminer le travail effectué par une force $\vec{F}$ lors d'un déplacement d'un point A à un point B $\left(\vec{AB}\right)$ où le travail de la force est un moyen d'évaluer les transferts d'énergie en jeu.

Travail par groupe d'experts

2 heures

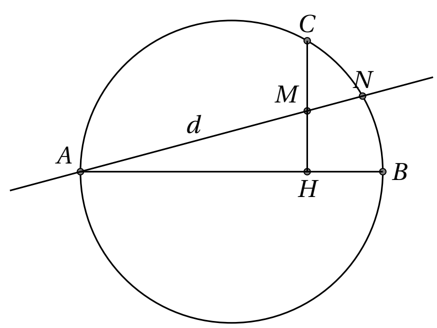
Groupe 1 - La projection orthogonale

Justifier que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{GH}$.



Exercice type :
Soit Γ un cercle de diamètre [AB].
Pour tout point C de Γ autre que A et B, on nomme H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) et d une droite variable passant par A.
La droite d recoupe le cercle en N et coupe la droite (CH) en M.

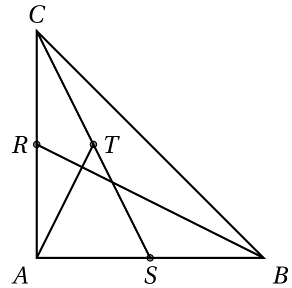
1. Faire la figure sur un logiciel.
2. Émettre une conjecture sur le produit $AM \times AN$.
3. Quelle est la nature du triangle ABN ?
4. Justifier les égalités suivantes :
   $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$.
5. Démontrer que $AM \times AN = AC^2$.



Groupe 2 - les coordonnées

Soit $A(2\,;\,-1)$, $B(3\,;\,2)$ et $C(0\,;\,3)$.
Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}$.
Exercice type :
soit ABC un triangle rectangle isocèle en A, avec AB = 4, R le milieu de [AC], S celui de [AB] et T celui de [CS].
On considère les points I de [AB] et J de [AC] tel que AI = AJ = 1.

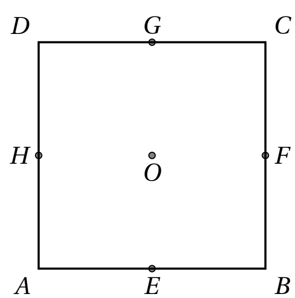
1. (**a**) Démontrer que (A,I,J) est un repère orthonormé.
   (**b**) Déterminer les coordonnées de A, B, C, R, S et T dans ce repère.
2. Démontrer que la médiane (AT) du triangle ACS et une hauteur du triangle ARB.



Groupe 3 - à l'aide des normes

Soit $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé.
Calculer $\|\overrightarrow{u}\|$, $\left\|\overrightarrow{-3u}\right\|$, $\|\overrightarrow{v}\|$, $\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|$.
Exercice type :
ABCD est un carré de côté 5 et E, F, G, H sont les milieux des côtés.

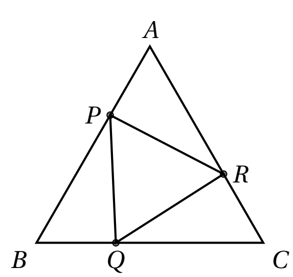
1. Déterminer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}^2$ et $\overrightarrow{AD}^2$.
2. Démontrer que $\overrightarrow{DE} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.
3. décomposer $\overrightarrow{AF}$ sur les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
4. En déduire $\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{AF}$. Interpréter géométriquement.



Groupe 4 - à l'aide des normes et d'un angle

ABC est un triangle équilatéral de côté 3.
Calculer $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}$.
Exercice type :
ABC est un triangle équilatéral de côté a.
Les points P, Q et R appartiennent à [AB], [BC] et [CA] et $AP = BQ = CR = \dfrac{a}{3}$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AR}$ puis Calculer $\overrightarrow{BA}.\left(\overrightarrow{AR}.\overrightarrow{AP}\right)$.
2. En déduire la nature du triangle APR.
3. Déterminer de même la nature des triangles BQP et CRQ puis celle de PQR.



Travail d'une force

2 heures

L'objectif de cette activité est de déterminer une formule permettant de déterminer le travail effectué par une force $\vec{F}$ lors d'un déplacement d'un point A à un point B $\left(\vec{AB}\right)$ où le travail de la force est un moyen d'évaluer les transferts d'énergie en jeu.

Lien entre le travail et l'intensité de la force

Validation des méthodes

3 heures

L'objectif de cette séance est de tester les algorithmes de résolution par un travail collaboratif. Les élèves doivent utiliser leur explicitation de résolution créés lors de la séance précédente.